Exposition

Huhn liebsch

Vektorielle Geometrie - Vertiefung

Elefanten fürchten Hühner, weil sie insgeheim wissen: Ein wütendes Huhn kann mit einer einzigen Feder ihre ganze Welt aus den Angeln heben – und das ist einfach zu absurd, um es zu ignorieren!

Die Schülerinnen und Schüler erweitern ihr Wissen zur Darstellung von Geraden durch die vektorielle Beschreibung mithilfe einer Parametergleichung. Sie erkennen die Tragfähigkeit dieser Darstellung insbesondere auch im dreidimensionalen Raum und übertragen diese auf die Beschreibung von Ebenen. Bei der Darstellung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatensystem sowie der Untersuchung von deren Lagebeziehungen wird das räumliche Vorstellungsvermögen weiter geschult. Damit können die Schülerinnen und Schüler lineare Gleichungssysteme geometrisch interpretieren und ihre Lösung deuten. Schließlich führen sie Flächen- und Volumenberechnungen an Objekten im Raum durch und modellieren reale Situationen mithilfe geometrischer Objekte.

Autor liebsch

QR liebsch

Logo liebsch

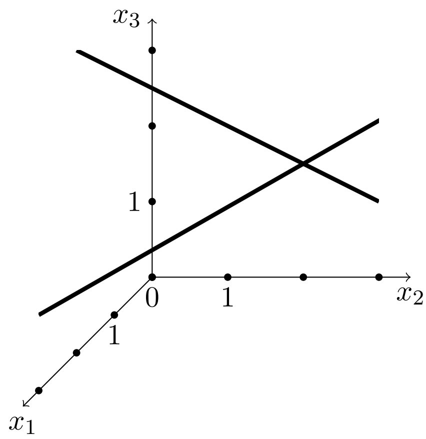
Komplikation

Bearbeite die folgende Aufgabe unter Berücksichtigung der einzelnen Problemlöseschritte. Dokumentiere und reflektiere deine Vorgehensweise.

Crash liebsch

Die Flugbahn zweier Hühner H_1 und H_2 werden durch zwei Geraden im Raum modelliert. H_1 startet in $A(-2|-2|2)$ und fliegt in Richtung des Punktes $B(2|4|2)$. H_2 startet in $C(3|0|1)$ und fliegt in Richtung des Punktes $D(-1|5|3)$.

Hühner fliegen ein kleines Stück, so wie ein betrunkener Philosoph einen klaren Gedanken fasst – kurz, überraschend und mit einem abrupten Ende in der nächsten Hecke!

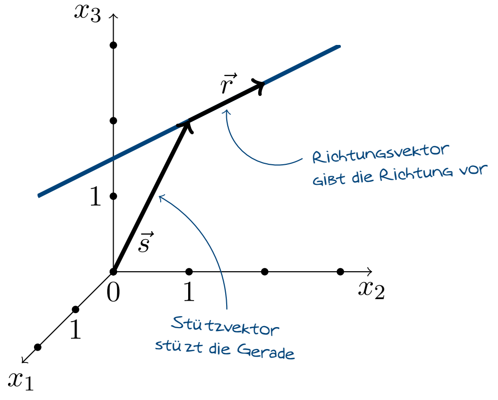


1. Streichle ein Huhn.
2. Gib an, welche Flugbahn zu welchem Huhn gehört.
3. Untersuche den Wahrheitsgehalt der Aussage: 'Es gibt einen Hühnercrash'.

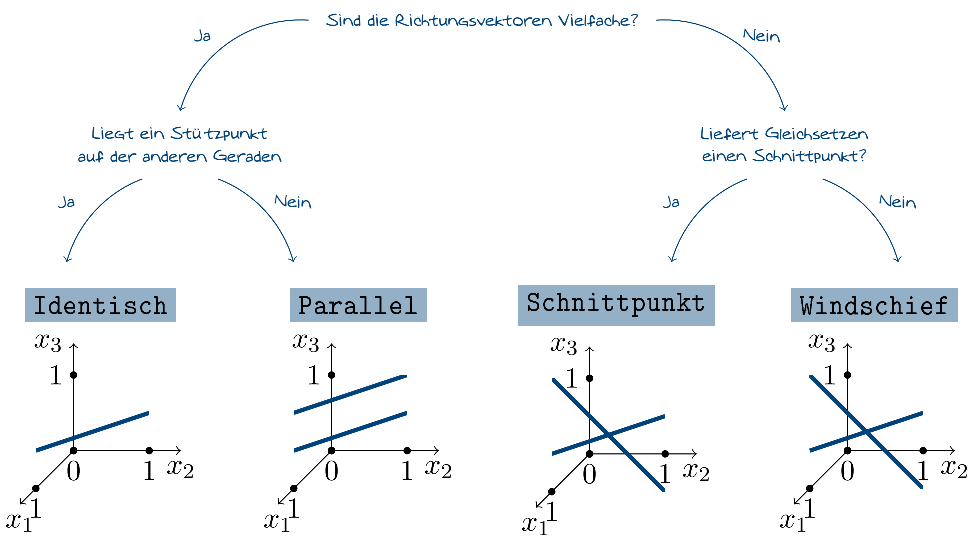
Peripetie

1. Wir definieren mit dem Stützvektor $\vec{s}$ und dem Richtungsvektor $\vec{r}$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Gerade g als Menge aller Punkte X, für deren Ortsvektor $\vec{x}$ gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$



2. Wir unterscheiden vier verschiedene Lagebeziehungen von Geraden:



Wenn sich zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{r}$ und $\vec{u}$ schneiden, so berechnen wir ihren Schnittwinkel α durch:

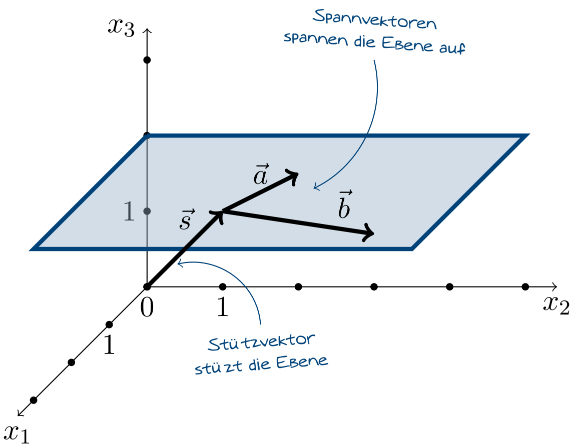
$$\alpha = \arccos\left(\frac{|\vec{r} \cdot \vec{u}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{u}|}\right)$$

Der Betrag einer Zahl macht sie positiv, der Betrag eines Vektors ist seine Länge!

3. Wir definieren mit dem Stützvektor $\vec{s}$ und den Spannvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ für $r;\ s \in \mathrm{R}$ eine Ebene E in der Parameterform als Menge aller Punkte X, für deren Ortsvektor $\vec{x}$ gilt:

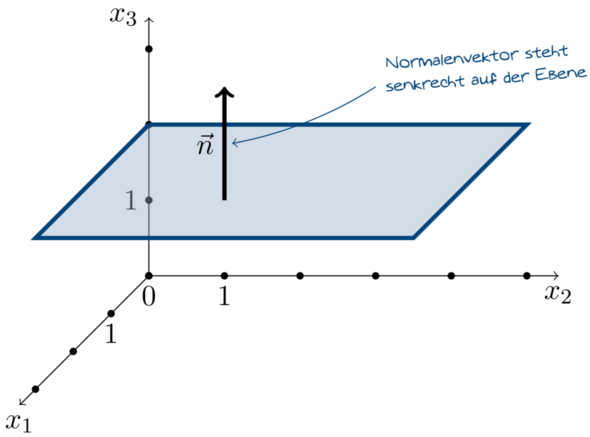
Im Prinzip wie eine Gerade mit zwei Richtungsvektoren!

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$



Wir können eine Ebene in der Koordinatenform darstellen durch:

$$E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$



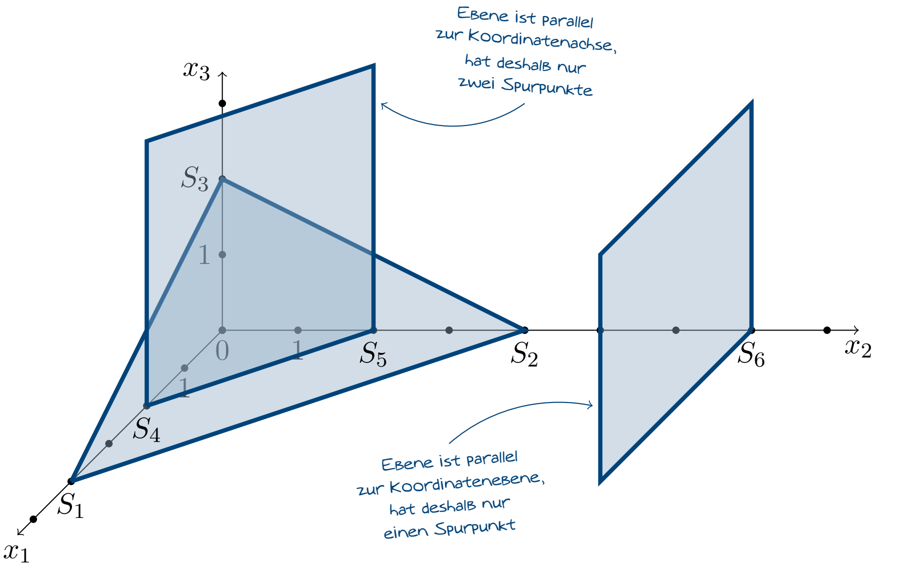
Dabei sind n_1; n_2 und n_3 die Koordinaten des Normalenvektors $\vec{n}$. Dieser steht senkrecht auf den Spannvektoren und berechnet sich aus dem Vektorprodukt der Spannvektoren:

Beim Vektorprodukt ist das Ergebnis ein Vektor, beim Skalarprodukt eine reelle Zahl!

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

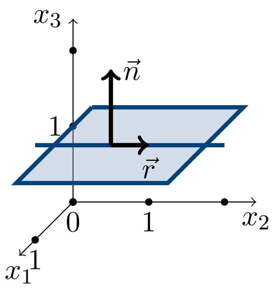
4. Wir veranschulichen die Lage von Ebenen mit **Spurpunkten** S, die auf den Koordinatenachsen liegen:

Bei einem Spurpunkt sind immer zwei Koordinaten Null!

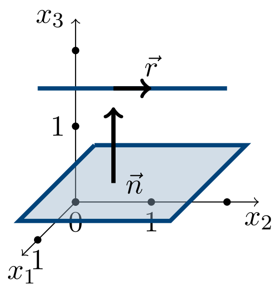


5. Wir untersuchen **Lagebeziehungen** von Ebenen durch das Vergleichen der Normalenvektoren und Richtungsvektoren und der Lösungsvielfalt des zugehörigen linearen Gleihungssystems:

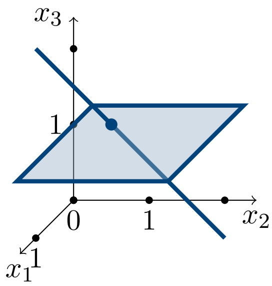
Gerade in Ebene



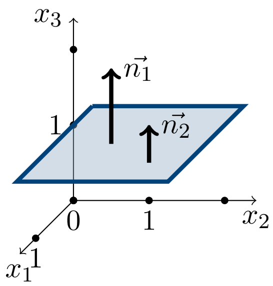
Parallele Gerade



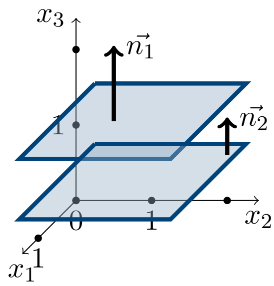
Schnittpunkt



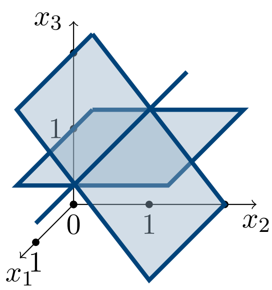
Identische Ebenen



Paralle Ebenen



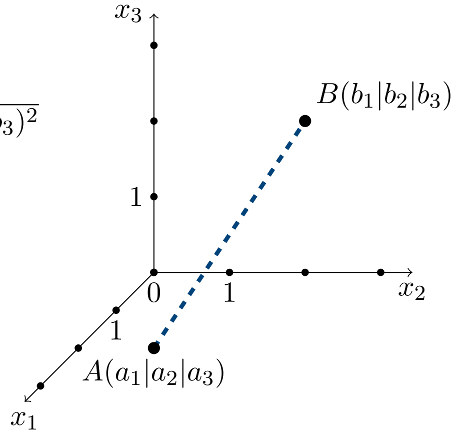
Schnittgerade



6. Wir bestimmen **Abstände** d von geometrischen Objekten.
Abstand zweier Punkte:

Entspricht der Länge des Verbindungsvektors

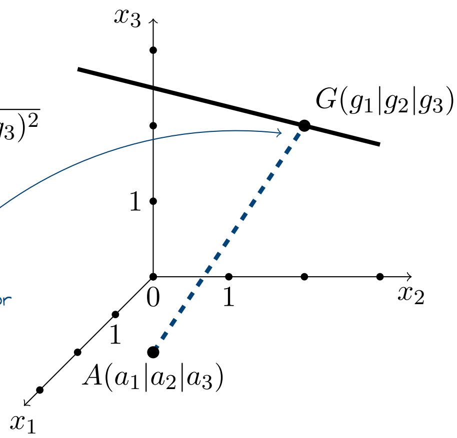
$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$



Abstand zwischen Punkt und Gerade (Analog parallele Geraden):

$$d = \sqrt{(a_1 - g_1)^2 + (a_2 - g_2)^2 + (a_3 - g_3)^2}$$

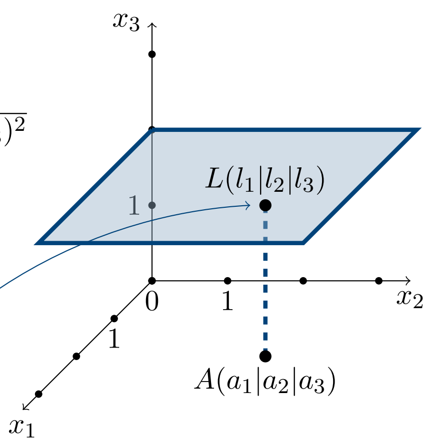
Der Richtungsvektor der Geraden steht senkrecht zum Abstandsvektor



Abstand zwischen Punkt und Ebene (Analog parallele Ebenen oder Gerade und Ebene):

$$d = \sqrt{(l_1 - b_1)^2 + (l_2 - b_2)^2 + (l_3 - b_3)^2}$$

Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt der senkrechten Lotgeraden und der Ebene



7. Wir lösen **geometrische Problemstellungen** im Sachzusammenhang und interpretieren die Ergebnisse im Kontext der Anwendung. im Sachzusammenhang:

Retardation

1. Gegeben ist die Gerade g mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.1. Zeichne die Gerade in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

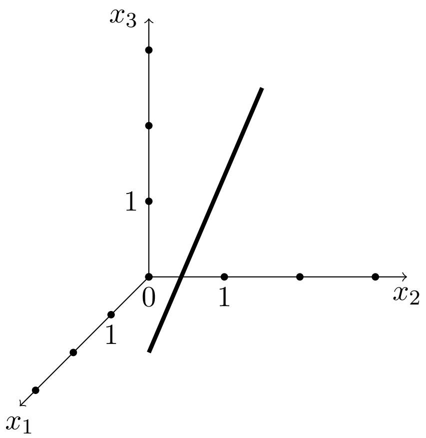
1.2. Untersuche, ob die Punkte $P(1|2|3)$ und $Q(a|10 \cdot a|8)$ für ein $a \in \mathrm{R}$ auf g liegen.

1.3. Ermittle den Schnittwinkel von g mit der x_1x_2-Ebene mit Hilfe der besonderen Lage von g. Taschenrechner

2. Gegeben sind die Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.1. Gib an, welche Gerade dargestellt ist. Skizziere dazu eine parallele Gerade und gib ihre Geradengleichung an.



2.2. Ermittle die Lage von g zu h und berechne gegebenenfalls Schnittwinkel und Schnittpunkt. Taschenrechner

2.3. Ermittle eine Gerade, die windschief zu g steht und h schneidet.

3. Gegeben sind die drei Punkte $A(3|0|1)$; $B(0|4|2)$ und $C(3|0|7)$, die auf der Ebene E liegen. Außerdem ist die Gerade g gegeben mit:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

3.1. Gib eine Parameterform von E an.

3.2. Berechne die Normalenform von E.

3.3. Gib die Normalenform von F an, wenn F vom Punkt A und der Geraden g aufgespannt wird.

4. Gegeben sind die Ebenen E und F mit:

$$E : 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 12 \cdot x_3 = 12$$

$$F : x_1 + x_2 = 3$$

4.1. Gib alle Spurpunkte von E und F an.

4.2. Zeichne die Ebenen in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

4.3. Ermittle zeichnerisch die Schnittgerade von E und F.

5. Gegeben sind die Ebenen E und F, sowie die Gerade g mit:

$$E : 2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 = 6$$

$$F : 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 3$$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1. Gib die Lage von g und F an.

5.2. Berechne den Schnittpunkt von g und E.

5.3. Ermittle die Schnittgerade von E und F.

6. Gegeben ist der Punkt $A(3|3|3)$, sowie die Gerade g und die Ebene E mit:

$$E: 4 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 + x_3 = 3$$

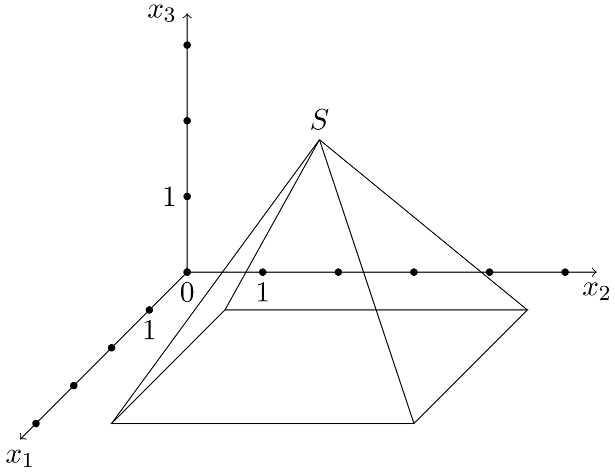
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6.1. Berechne den Abstand von A zum Stützpunkt von g.

6.2. Berechne den Abstand von A zu g.

6.3. Ermittle den Abstand von A zu E und Ermittle den Punkt A', der bei der Spiegelung von A an der Ebene E entsteht.

7. Eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche in der x_1x_2-Ebene hat die Höhe 3.



7.1. Gib mit Hilfe der Skizze die Koordinaten aller Eckpunkte an, wenn die Spitze S mittig über der Grundfläche liegt.

7.2. Berechne das Volumen und die Mantelfäche der Pyramide. Berechne den Schattenpunkt S_b den eine Lichtquelle von $L(3|0|5)$ geradlinig von S auf die x_1x_2-Ebene wirft. Taschenrechner

7.3. Erläutere, wie man näherungsweise eine Ebene E ermitteln kann, die parallel zur x_1x_2-Ebene liegt, sodass die Ebene die Pyramide in zwei gleich großte Teile teilt.

Katastrophe

Ein Elefant wird am Spieß gegrillt.

Der Elefant hätte nie gedacht, dass sein Tag mit einem philosophischen Streit über Brathähnchen beginnt und mit drei Hühnern endet, die ihn überzeugt haben, dass er das Brathähnchen ist.

Grillen liebsch

Der Grillspieß g wird modelliert durch die Schnittgerade der Ebene E und der Ebene F. Die Ebene E ist gegeben durch:

$$E: 2 \cdot x_1 - x_2 + 3 \cdot x_3 = 168$$

Die Ebene F wird aufgespannt durch die Geraden g und h mit:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 28 \\ 22 \\ 34 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

1. Schreibe ein trauriges Gedicht über den gegrillten Elefanten.

2. Ermittle die Koordinatenform der Ebene F.

3. Um die Gartemperatur zu überprüfen, führen die Hühner ein Thermometer geradlinig in das Grillgut ein, bei der sie den Grillspieß treffen Die Thermometerbewegung t wird modelliert durch die Gerade:

$$t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ermittle den Punkt, in dem das Thermometer den Grillspieß trifft.